DOI:10.16262/j.cnki.1000-8217.2000.02.008

·学科进展·

工程中数值分析的复杂力学建模与高精度方法

曾 攀* 石亦平

(清华大学机械工程系,北京 100084)

[摘 要] 工程中复杂力学问题的数值模拟与计算是先进制造技术和虚拟现实技术的重要组成部分,相应的建模与高精度方法成为该方向的技术关键,对其地位及国内外发展现状进行了评述,指出了新型高精度单元建模的思路和涉及的关键问题。

[关键词] 建模,高精度,有限元方法,数值分析

引 言

近十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,工程中的复杂力学问题正引起国内外学术界的高度重视,甚至成为许多领域技术进步的关键,如:先进制造技术、虚拟现实技术、现代材料加工技术、超高层及大跨度结构物、航空航天技术等;现代工程问题愈来愈复杂,其计算量将大得惊人。因此,除期望高性能计算机硬件的发展以外,更重要的是发展新型高精度、高效率的现代数值分析技术,这也是目前国际学术界的一个发展前沿,如果这方面技术获得突破并实用化,将大大地改进现行的有限元方法(Finite Element Method,FEM)及计算机辅助设计(Computer Aided Design,CAD)技术;可大大缩短大型工程结构的分析时间并提高其分析精度,对提高整个机械结构的设计水平和产品质量将有极其重要的意义;在学术上,将会对传统有限元数值分析方法产生重要的影响;在实用方面,将为重大工程中关键力学问题的分析提供有效的手段。

先进制造技术中的一个重要发展趋势是工艺设计由经验判断走向定量分析,将数值模拟应用于铸造、锻压、焊接、热处理等工艺设计中,并与物理模拟和专家系统结合,来确定工艺参数、优化工艺方案,预测加工过程中可能产生的缺陷及采取的防止措施,控制和保护加工工件的质量。代表性的技术有:虚拟铸造技术、虚拟锻压技术、焊接、热处理工艺过程模拟及质量预测、组织性能预测,成形工艺-模具-产品 CAD/CAM(Computer Aided Manufacture)一体化。就材料加工工程而言,近年来,工业发达国家已经提出材料加工成形将由“接近净成形(NearNet Shape Products)”向“净成形(Net Shape Products)”发展,如用精密铸造和精密塑性成形工艺来制造零件,以及采用“自由成形制造(FFF)”的概念和技术等。可以看出,材料加工学科的发展正逐步由“定性”走向“定量”,由“经验”走向“科学”,在这一转变过程中起关键作用的就是相应的力学建模及计算机数值模拟,也就是加工过程的信息处理。目前这方面的主要方向是:(1)利用数值模拟技术研究成形过程,找出金属的流动规律、应力和应变场分布、应力和温度场分布,从而确定工艺规范;(2)利用数值模拟技术研究成形过程中缺陷(如缩孔、疏松、裂纹)产生的机理,判据及防止措施;(3)利用数值模拟技术研究加工过程中微观组织(如晶粒度、夹杂物)的状况及其控制方法,这也是材料加工工程的前沿课题。在现代材料加工工程中,工件及本构关系都很复杂,并且具有高度的非线性,例如在塑性加工过程中,不但结构形状复杂,而且材料的本构关系还是弹塑性,采用有限元方法进行数值计算时,既要考虑物理非线性又要考虑大位移变形的几何非线性,这样才能得到比较接近实际情况的结果;又如,在铸造过程温度场及应力场的数值模拟中,要涉及温度的耦合及弹塑性蠕变问题,其中的力学建模及计算过程都很复杂,一般

---

* 1998年度国家杰出青年科学基金获得者.
本文于1999年4月8日收到.

都达几万个自由度,大型的工程问题则达到几十万个甚至上百万个自由度,有的还需要网格重划,要求计算机容量大,所需时间也很长,虽然日新月异的计算机硬件为求解这些问题创造了条件,但求解的时间也长达几个小时、几十个小时或几天,如果是非线性问题,则花的时间还要多几倍或几十倍,这使得许多工程实际问题由于计算问题等原因还没有实质性的进展;因此,高效率建模和计算是解决复杂工程问题数值模拟的一个技术关键。

1　国内外研究现状

近十多年来,关于有限元的精度、误差、可靠性已成为众多科学家研究和关注的焦点,已发展了 h-version、p-version、h-p version 自适应方法等[1—5],许多国际上知名的 FEM 及 CAD 大公司(如: MSC, ANSYS, ALGOR……)也纷纷参与研究及开发相应的 FEM 及 CAD 软件。就目前工程中应用最广泛的有限元方法而言,主要有以下一些提高精度的方法。

(1) h 方法(h-version):不改变各单元上基底函数的配置情况,只通过逐步加密有限元网格来使结果向正确解逼近[4]。这种方法在有限应用中最为常用,并且往往采用较为简单的单元构造形式。h 方法可以达到一般工程的精度(即将以能量范数度量的误差控制在 5%—10%),其收敛性比 p 方法差,但由于不用高阶多项式作基底函数,因而数值稳定性和可靠性都较好。

(2) p 方法(p-version):保持有限元的网格剖分固定不变,增加各单元上基底函数的阶次,从而改善计算精度。Babuska I.和 Dorr M.对 p 方法作了系统的理论研究[3]。在该方法中,一般以应力形式表达的能量范数来估计误差,如著名的 Z^2 法(即由 Zienkiewicz 和 Zhu 提出[2]),即

$$\| e_h \|^2 = \int_\Omega (\sigma^* - \sigma^h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma^h)\, d\Omega$$

其中,σ^h 为有限元分析解得的应力,σ^* 为由平滑节点应力通过形函数插值得到的应力。大量的实践表明:p 方法的收敛性大大优于 h 方法;p 方法的收敛性可根据 Weierstrass 定理来论证;由于 p 方法使用高阶多项式作为基底函数,会出现数值稳定性问题,另外,由于计算机容量和速度的限制,多项式的阶次不能太高,一般不超过 8 阶。尤其在振动和稳定问题求解高阶特征值时,无论 h 方法还是 p 方法都不能令人满意,这是多项式插值本身的局限性造成的。

(3) r 方法:不改变单元类型和单元数目,通过移动结点来减小离散误差,因而,单元自由度不变。

(4)组合方法:即上述各种方法的联合使用[4,5]。最典型的是 h-p 方法,即在加密有限元网格的同时,也增加各单元上基底函数配置的个数和阶次,这种过程称为 h-p 收敛过程,针对任何一具体的问题可以达到一种优化组合,那么,该方法可成为一种自适应方法。

(5)自适应方法:在近年来成为有限元研究的主要方向之一。它运用反馈原理,利用上一步的计算结果来修改有限元模型,其计算量较小,计算精度却得到显著提高。自适应方法可以分别和 h 方法、p 方法及 h-p 方法结合,称为 h 自适应方法、p 自适应方法和 h-p 自适应方法。自适应方法由误差指示算子(error indicators)来监控,而收敛程度则由误差估计算子(error estimators)来监控。

对于固定的自由度总数 $N = N_0$,最优网格和阶次(h-p)的确定可化为以下优化问题[19,20]:

$$\min L(h,p,\lambda) = J(h,p) - \lambda\left(\int_\Omega n(h,p)\,dx - N_0\right)$$

其中,λ 为 Lagrange 乘子。即,在满足自由度总数为常数的约束条件下,极小化估计误差。在实际应用中,要求新自由度引起的误差的减小量尽可能大,以实现网格的高效改进[6]。Oden 曾将类似方法用于流体力学中 Navier-Stockes 方程的数值求解[7],将单元的"广义熵误差指标"作为局部误差,利用给定 h-p 网格估计误差的极小化,确定网格参数(h-p)的分布,获得了指数率收敛。

自适应性可定义为按现时条件检查后为满足某一要求的整个自动调整过程[8]。自适应 FEM 是一种能自动调整其算法以改进求解过程的数值方法,它包括多种技术,其中主要的有:误差估计、自适应网格改进、非线性问题中载荷增量的自适应选取及瞬态问题中时间步长的自适应调整等。从更高层次上来看,高精度数值分析及自适应方法应具有一体化过程,其自动调整过程为多进程循环过程,有关框架见图1。

(6)升阶谱有限元:作为 p 收敛过程的一种有效方法,它是由常规的位移协调元结合数量逐步增加的附加自由度而构成,使低阶升阶谱元的自由度是高阶升阶谱元自由度的一个子集,因而大大节省计算量,可为编制自适应分析程序提供极为有利的条件。但由于要用高阶多项式作为基底函数,从而易出现数值稳定性问题。

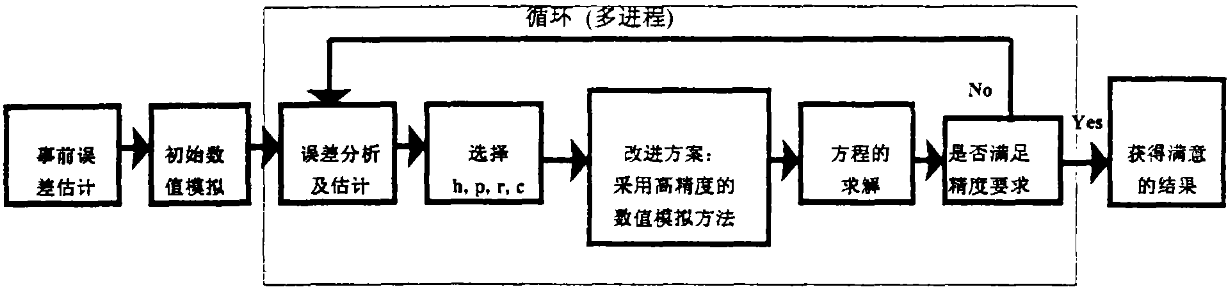

图1　高精度数值分析及自适应方法的实施过程

在升阶谱有限元中，一般采用能量范数来度量误差的变化[3,5]，即

$$\| e_{n,1} \|^2 = \frac{(f_{n+1} - k_{n+1,n}a_n)^2}{k_{n+1,n+1}}$$

其中，$k_{n+1,n+1}$为引进新自由度情形下的刚度阵，a_n为节点自由度。可根据$\| e_{n,1} \|$来确定增加位移函数的阶次。

(7) 理性有限元方法：由钟万勰教授提出[9]，该方法以力学的需求为主导，考虑了力学的微分方程，用简单应力状态的弹性力学基本解作为基底函数，来完成插值逼近，对于不同的材料性质和单元特性，其插值的解会自动变化适应，易于处理不可压缩材料的体积自锁，弯曲变形的剪切自锁等问题，并且适用于差分方法。

就传统的解析方法而言，也发展了一些提高精度的方法。

(1)半解析单元法：是应用半解析解函数[10]，基于变分方程的一种半解析数值方法。能够发挥已有的解析方法研究成果以减少纯数值方法的计算工作量。其适用范围较广泛，对于一、二维结构，可建立板单元、壳单元及平面单元；对于三维结构，可建立柱单元、环单元、层单元及厚板单元、厚壳单元，并可用于三维弹塑性分析、稳定性分析、几何非线性分析、非线性弹性分析以及岩土、流体等介质分析。

(2) 谱方法：在解析方法中，谱方法特别是Fourier级数解法是极为重要的方法[11]，它不仅可以适用于各种荷载情况，而且运算方便，由于具有正交性，可以使计算结果大大简化，具有很高的精度和效率。

上述二类方法的显著缺点是：对几何形状、边界条件和材料的任意变化的适应能力不强。只在一个方向上引入解析函数，另一个方向上仍使用常规有限元的多项式插值，对解析方法和数值方法的结合不够彻底。

尽管国内外学术界在高精度计算方面的研究已取得了不小的进展，但还远没达到人们所期望的水平，其根本原因还是缺乏高效率和具有相当实用性的数值分析和建模方法。例如，目前国内外用于金属塑性成形的数值模拟技术，都是以传统有限元方法为基础的，由于其"单元"的低精度，使得整体分析的计算规模大、精度差、效率低，加上涉及几何非线性和材料非线性的计算，上述问题则显得更为突出。在大变形问题中，又涉及网格的重构问题，必须使用足够多和足够小的网格，因此，网格重构的工作量将是非常大的。如苏黎士瑞士联邦理工学院所发展的体积塑性成型模拟系统[12]、美国 ANSYS 软件、法国的 ATRIM100、日本大阪工业大学所发展的用于板料的 IAS-3D 和 DYNAMIC 系统、吉林工业大学所开发的汽车覆盖件模具设计 CAD/CAE/CAM 系统等，虽然在非线性的处理、接触问题、应变强化与应变速率敏感性、动态过程的显式解法等方面都有深入的研究，但在单元的函数形式方面仍基本上完全采用常规的 FEM 单元(如 3—8 节点薄、厚曲壳单元及平板壳单元、4—8 节点 3D 单元)，因而计算的精度和效率都较低。瑞士联邦理工学院在管材挤压过程的数值模拟过程中[12]，划分了 15 万个单元，在 SGI 机上(R4400 处理器)每小时仅能计算一个小增量步，而日本大阪工业大学在模拟日产汽车的前轮盖板的成形过程中[13,14]，采用了 2 501 个壳单元和 2 604 个节点，整个计算过程为 20 000 步。

2　高精度单元建模的新途径

从前面的综述可以看出以下几个问题：

(1)数值方法和解析方法的有效结合是力学高精度方法的发展方向[10,15]；理性有限元和半解析单元法都在这方面作了研究，但其结果仍不能满足工程应用的需要。理性有限元以弹性力学基本解作为

基底函数,半解析单元法仅有一个方向上引入解析函数,适应材料、形状、边界变化的能力不强。

(2)基底函数的选择是数值方法和解析方法相结合的切入点,是各种高精度方法的核心问题,目前的各种有限元法主要是基于变分原理的位移法,其关键在于选择适当的基底函数来构造位移场,理性有限元和半解析单元法是通过基底函数来把数值方法和解析方法耦合。在纯数值方法中,升阶谱有限元和 p 方法运用高阶多项式来对位移场进行插值,其核心思想同样体现在基底函数上。谱方法是运用一系列谱函数作为基底函数来构造位移场。

(3)使用从解析解中得到的谱函数作为基底函数可显著提高计算精度和效率。谱函数具有如下优点:(ⅰ)完备性,即其线性组合可无限一致地逼近任何域内逐段连续二次可积且满足边界条件的函数。(ⅱ)正交性,即不同的谱函数相乘后积分为0,这使得刚度阵和质量阵的带宽很窄,在解析方法中可大大简化微积分方程的求解。(ⅲ)形如 sin(nx)和 cos(nx)的谱函数本身就具备了波动振荡的形式,在求解振动、稳定以及流体问题时,其优于多项式插值的特性体现得尤为充分。(ⅳ)运用从相应力学问题的解析解中选择的谱函数,可充分体现力学的特性,优于只以多项式来插值的方法。

(4)升阶谱有限元为如何运用谱函数构造基底函数提供了良好的思路。基底函数所构造的位移场需满足单元结点处的位移边界条件,如果直接令谱函数满足结点位移条件,其计算较复杂,而常规有限元的位移多项式插值可以很容易地满足节点位移边界条件。升阶谱有限元的位移函数很巧妙地利用了这一特点,例如,其拉压杆的位移函数为:

$$u = \frac{1}{2}u_1(1-\xi) + \frac{1}{2}u_2(1+\xi) + \sum_{i=3}^{n} a_i\varphi_i$$

其中,前2项是常规有限元的多项式插值,满足两端结点处($\xi=-1$ 和 $\xi=1$)位移分别为 u_1、u_2 的单元边界条件,第3项以后 φ_i 是升阶谱多项式形函数,满足零边界条件,即 $\xi=\pm1$ 时 $\varphi i=0$。如果将 φ_i 换为从解析解中得到的谱函数,则可构造出谱函数和常规有限元多项式插值的位移场,此过程中没有增加单元的结点,而且和后续的求解步骤(刚度、质量矩阵的推导、方程组的求解等)可完全沿用常规有限元的方法。

3 单元建模与经典方法的结合

将2种方法的优点集中起来并进行结合是一种发展趋势,关键是看如何实现,其理论基础是否可靠。在有限元分析断裂问题时,有学者研究了用于裂纹问题分析的特种单元,所构造的带裂纹尖端位移场的"裂纹单元"就是采用的复合方法,但所用的"复合条件"并不严格(在相容性方面),即在"裂纹单元"的单元边界上其位移函数不能精确满足位移场的相容性,则在数学上不能保证收敛性,因此,该"裂纹单元"除裂纹尖端的结果比较好外,其余区域(特别是单元边界)的计算误差较大。在实际应用中,由于一般只考虑简单外载下的微小裂纹问题,而且"裂纹单元"的边界远离裂纹,因此,就裂纹尖端附近的结果,工程上是可以接受的。

钟万勰教授提出了理性有限元方法[9,15],即用力学方程的基本解作为插值逼近的基底函数,把解析方法和数值方法结合起来,得到高效的单元列式。基于解析方法发展起来的杆元素和梁元素的动刚度矩阵[16]、杆系结构动力计算的精确解法[17],还有应力集中单元等方法,也都是某种意义上的复合建模,都是在某种程度上充分利用解析解的高精度,因而在不同程度上取得好的效果,当然,这些方法在应用范围方面还有一定的局限性,还有待于进一步的发展和完善。

如要建立一种真正的、理论上严格的、具有通用性的"复合单元",则必须研究单元建模中复合位移场的相容性以及单元边界相容条件。

近年来,所发展的具有一定通用性的高精度复合单元法(CEM, Composite Element Method)是一种用于结构分析的高效计算方法[18],它的思路是:在单元建模中,把经典解析方法和常规有限元结合起来,为得到普遍性和精确性的建模,研究了"单元边界条件",在该条件下,通过动力学问题的求解来获得经典解析位移场(谱)[19],再把该单元内的经典解析位移场(谱)嵌入到常规有限元的单元位移场中以形成一种新的通用单元——复合单元,既能够充分利用常规有限元的灵活性又不丢失经典解析方法所具有的高精度。

在复合单元法中[13],对任一离散单元选择以下多项式函数和解析解函数来共同描述位移场。即

$$U(\xi) = N(\xi)q + \phi(\xi)c$$

能够看到 $U(\xi)$ 由两部分组成:

$$U(\xi) = U_{FEM}(\xi) + U_{CT}(\xi)$$

在这里,$U_{FEM}(\xi)$ 是基于有限元节点自由度的位移场,$N(\xi)$ 是一个仅与空间位置相关的有限元的形函数。$U_{CT}(\xi)$ 是基于场自由度的经典解析理论的位

移场(谱);$\phi(\xi)$是由经典解析理论所获得的解析函数。可以看出,q 是常规有限元的节点坐标,也叫做节点自由度;c 是场坐标,也叫 c 自由度或者 c 坐标。场坐标和它的基底函数 $\phi(\xi)$不是绝对自由的,它必须得满足某些要求,特别是单元边界条件。

基于复合单元法的数值试验结果表明:该方法不仅具有高精度、还具有少计算量、数值稳定性好等特点,在相同的计算量的前提下,该方法的计算精度大大高于传统 FEM,在相同的计算精度前提下,该方法的计算量大大低于传统 FEM。图 2 为一个数值算例的比较,该模型为 Finite Element News 国际杂志的主编 Prof. J. Robinson 所提出的一个著名考题[17],左图为常规 FEM 的网格划分,右图为复合单元方法(CEM)的网格划分,而这 2 种方案在关键位置的计算结果基本一样。图 3 为另一个数值算例的比较,该模型为国际著名的有限元专家 Prof. O. C. Zienkiewicz 所提出的另一个著名考题[20],左图为常规 FEM 的网格划分,右图为复合单元方法(CEM)的网格划分,而这 2 种方案在关键点的计算结果基本一样。

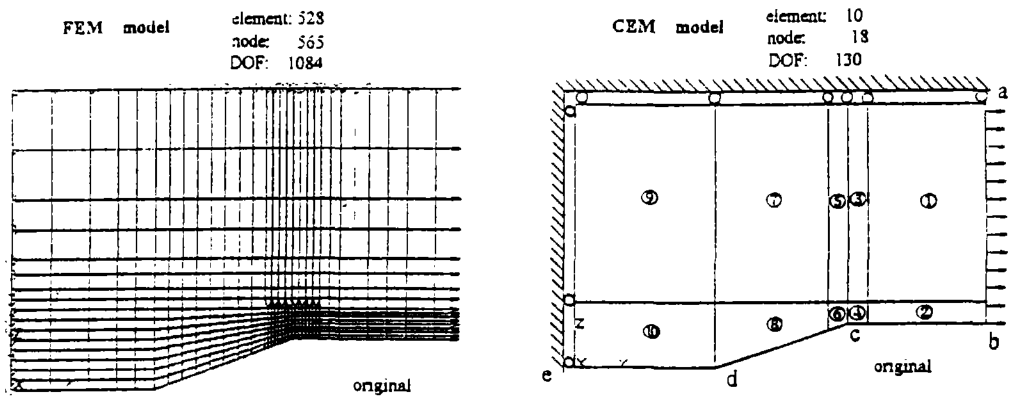

图 2 二维阶梯形弹性问题的数值分析

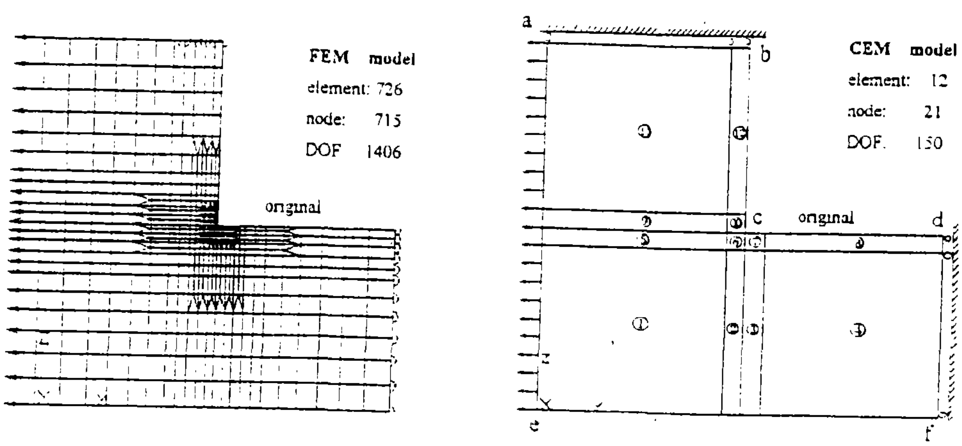

图 3 L形弹性问题的数值分析

4 新型高精度单元建模所涉及的关键问题

我们知道,在工程问题的数值分析中,影响精度和效率的因素有许多,但最基本、最本质的、影响最大的是"离散单元"的建模精度和效率,新型的高精度单元建模及方法可为下列方向的研究和深入发展提供新的数值分析手段:如虚拟铸造技术,虚拟锻压技术,焊接、热处理工艺过程模拟及质量预测、组织性能预测、新型成形工艺、模具设计、产品 CAD/CAM 一体化、复杂结构分析、故障诊断等。

目前,高精度单元建模正日益受到许多学者的重视,也是一新的研究方向,它将涉及:节点描述、内部位移场描述、节点条件、耦合的相容性条件等,因此必须处理好以下几个关键问题。(1)描述基本模

态信息的单元复合位移场的构造;(2)单元内相容性节点边界条件;(3)单元内的高精度数值积分;(4)方程组的新型求解方法;(5)与传统有限元方法的相容性。

参 考 文 献

[1] 王勖成,邵敏.有限单元法基本原理与数值方法.北京:清华大学出版社,1997.

[2] Zienkiewicz O C, Zhu. Accuracy and adaptivity in FE analysis: the changing face of practical computations. In: Computational Mechanics. Rotterdam: Balkema, 1991, **1**: 3—12.

[3] Babuska I, Dorr M R. Error estimates for the combined h and p versions of finite element method. SIAM J. Numer. Analysis, 1981, **37**:257—277.

[4] Oden J T, Abani P. A parallel adaptive strategy for h－p finite element computations. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1995, **121**: 449—470.

[5] Zienkiewicz O C, Craig A W. Adaptive mesh refinement and a posteriori error estimation for the p-version of the FEM. In: Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations (eds. Babuska I, Chandra I), Philadelphia: Society for Indu. Appl. Math., 1983, 33—56.

[6] 郭书祥.自适应有限元方法及其工程应用.力学进展,1997,**27**: 479—488.

[7] Oden J T. H-p adpative methods in CFD. in: Mechanics Computing in 1990's & Beyond (Adeli H et al. eds). ASCE. 1991, 129—133.

[8] Gui W, Babuska I. The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension, Part 1: the error analysis of the p-version. Numer. Math., 1986, **49**: 577—612.

[9] 钟万勰,纪峥.理性有限元.计算结构力学及其应用,1996, 13: 1—8.

[10] 曹志远,张佑启.半解析数值方法.北京:国防工业出版社, 1992.

[11] 严宗达.结构力学中的富里叶级数解法.天津:天津大学出版社, 1989.

[12] Tong L Hora P, Reissner J. Application of the arbitrary Lagrangian-Eulerian method in the FE-simulation of 3-D bulk forming processes. NUMIFORM 92,1992, 669—674.

[13] Wang S P, Nakamachi E. Nonlinear contact and friction modeling in dynamic explicit finite element analysis. Numisheet'96,1996.

[14] Nakamachi E. Sheet-forming process characterization by static-explicit anisotropic elastic-plastic finite-element simulation. J. of Materials Processing Technology, 1995. **50**: 116—132.

[15] 钟万勰.弹性力学求解新体系.大连:大连理工大学出版社, 1995.

[16] 张阿舟,林佳铿.杆元素和梁元素的动刚度矩阵.南京航空学院学报,1980, **3**: 45—53.

[17] 沙德松,孙焕纯,费新芳.杆系结构动力学计算的精确解法.大连工学院学报,1988, **27**: 1—6.

[18] Zeng P. Introduction to composite element method for structural analysis in engineering. Key Engineering Materials, 1998, **145**:185—190.

[19] Shabana A A. Computational dynamics. New York : Wiley, 1995.

[20] Robinson J. The growing confusion in finite element method and adaptivity. Finite Element News, 1994, 4:32.

MODELING AND HIGH-ACCURACY COMPUTING OF NUMERICAL ANALYSIS IN ENGINEERING STRUCTURE

Zeng Pan　　Shi Yiping

(*Dept. of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract　Numerical simulating and high-accuracy computing of complex engineering problem are playing an important role in the advanced manufacture technology and the virtual reality. Therefore the modeling and high-accuracy computing will become a focus. From the point of element modeling, the paper aims to review the state of the art in these aspects. The contents cover the h-version, r-version, p-version, combined h-p version, combined r-p version, and error estimating. Also the strategy and procedure of the high-accuracy numerical analysis and the adaptive methods are discussed. The related ideas and key aspects to develop new element modeling with high-accuracy are pointed.

Key words　modeling, high-accuracy, finite element method, numerical analysis